

时—空欠采样下的频率和 DOA 联合估计算法

黄翔东, 冼弘宇, 闫子阳, 景森学

(天津大学电子信息工程学院, 天津 300072)

摘要: 针对时—空欠采样下入射信号的频率和波达方向(DOA)估计问题, 提出基于谱校正和中国余数定理的联合估计算法。首先利用稀疏分布的传感器阵元构造非均匀线阵, 然后对入射信号做多路并行欠采样; 借助 AM 估计器, 该算法仅耗费少量样本即可获得精确频率和相位差余数, 再结合闭式中国余数定理分别得到频率和 DOA 估计值。由于谱校正结果可以同时为频率估计器和 DOA 估计器所利用, 因而该算法的样本利用率高。此外, 与现有基于中国余数定理的频率估计法相比, 该估计器无需对源信号做多次欠采样, 耗时更短, 更适用于快速时变目标的估计。仿真结果验证了联合估计算法的有效性和高精度, 而且该算法在低信噪比情况下亦可达到很高的成功检测率, 具有广阔的应用前景。

关键词: 波达方向; 频率估计; 欠采样; 中国余数定理

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

Joint estimation of frequency and DOA with spatio-temporal under sampling

HUANG Xiang-dong, XIAN Hong-yu, YAN Zi-yang, JING Sen-xue

(School of Electronic Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: In order to estimate the frequency and DOA of an incident signal with sub-Nyquist spatio-temporal sampling, a novel joint estimation algorithm based on spectrum correction and Chinese remainder theorem (CRT) was proposed. Firstly, the incident signal was parallelly sampled at multiple sensors non-uniformly located in a sparse linear array. Then, AM spectrum corrector was employed to extract the remainder of frequency and phase-difference from a small quantity of snapshots. Finally, implementing the close-form CRT on these remainders directly yields the estimates of frequency and DOA. In the proposed scheme, the spectrum corrector was shared by both the frequency estimator and the DOA estimator, which contributed to a high utilization of the snapshots. Furthermore, compared to the existing CRT based estimators, the proposed estimator needs not to incorporate multiple times of temporal undersampling on a single sensor, which saves considerable time consumption and thus obtain high ability of tracking time-variant objects. Simulations verify the feasibility and the high-accuracy of the proposed joint estimator and further study shows that high reconstruction probability can be realized even in low SNR cases, which present the vast potential for future development.

Key words: direction of arrival, frequency estimation, undersampling, Chinese remainder theorem

1 引言

空间入射信号的频率和波达方向(DOA, direction of arrival)估计是阵列信号处理的研究热点, 在声纳、雷达、电子战等领域应用广泛^[1,2]。经典的空

间谱估计算法包括 MUSIC 和 ESPRIT 算法, 通过对其进行研究拓展, 学者们相继提出了其改进版本并实现了信号频率和 DOA 的联合估计^[3,4]。然而这些方法都需要耗费较大的运算量, 而且其理论前提要求信号在空域和时域的采样均满足奈奎斯特定

收稿日期: 2015-07-24; 修回日期: 2015-11-05

通信作者: 黄翔东, xduan@tju.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.61271322)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China(No.61271322)

理, 这个条件对一些实际工程应用而言却是比较苛刻的。如在电子战中工作信号往往分布在很宽的频段范围(2~18 GHz)^[5], 为满足采样定理的相邻阵元间距不得大于信号半波长的条件, 需要将阵元密集布置, 这不仅给硬件安装带来困难, 而且容易引起信号在相邻阵元间的互耦, 从而降低测算精度。此外, 对时域采样而言, 奈奎斯特定理要求采样速率大于待测信号最高频率的 2 倍, 这对模数转换器(ADC, analog to digital convert)以及后端数据处理器的性能提出了苛刻的要求, 增大了硬件成本和工程实现的难度。因此, 寻求一种适用于时—空欠采样情况的参数联合估计方法, 突破阵元间距的限制并有效地降低采样速率具有重要意义。

欠采样情况下的频率和 DOA 联合估计研究最早见于文献[5], Zoltowski 提出将 2~18 GHz 的机载雷达宽频信号划分为 1 GHz 的子带, 再结合 ESPRIT 算法综合处理得到估计结果; 然而该方法需要给每个阵元配备滤波器组和混频器, 硬件成本较高。近年提出的压缩感知(CS, compressive sensing)理论利用信号的稀疏特性, 采用非自适应的随机投影来保持信号的原始结构信息, 可在欠采样条件下通过稀疏重建方法恢复出原始信号。针对宽频段内 DOA 估计问题, 文献[6]基于 CS 理论提出一种二维 DOA 估计算法, 可测量出多个窄带信号的频率、方位角和俯仰角, 然而该算法仍需要满足阵元间距不大于半波长的条件。近年来, 互素谱(co-prime spectrum)理论也被应用于阵列信号处理领域, 然而目前基于互素谱的方法只能实现欠采样下的频率或 DOA 的单一参数测量, 无法实现两者的联合估计^[7, 8]。由中国余数定理(CRT, Chinese remainder theorem)可知, 若一个正整数不大于一组两两互质的整数的最小公倍数, 那么该整数可以由其取模运算后的余数唯一确定。利用 CRT 的这种重构特性, 可以解决欠采样引起的一系列解模糊问题。如文献[9]提出一种顽健的 CRT 算法并将其应用于复指数信号的频率估计, 通过多路采样的方法大大降低了采样速率; 然而该算法的重构过程需进行多次二维搜索, 同时

要求每一路样本的 DFT 点数必须等于采样速率值, 因而频率分辨率只能精确到 1 Hz, 且当样本较少时额外耗费了运算量。为了避免多余搜索, 文献[10]提出了一种顽健的闭式 CRT 算法, 并在文献[11]中将其用于欠采样下信号频率的估计。文献[12]通过把 Candan 频率估计器^[13]与闭式 CRT 算法相结合, 将基于 CRT 的频率估计从复指数信号推广到实数余弦信号, 同时有效降低了运算量, 然而该算法估计精度受信号频偏影响较大; 文献[14]论证了将 CRT 应用于时域和空间欠采样下 DOA 估计的可行性, 为进一步做研究拓展(如本文涉及的空域阵列结构和时域采样优化)奠定了基础, 然而文献[14]在测频时是利用单个阵元做多次时域欠采样实现的, 耗时较长, 不适用于时变目标检测场合; 此外, 文献[14]中的频率测量和 DOA 测量是分开进行的, 无法从同一组样本数据中得到目标参数的联合估计。

本文提出一种基于闭式 CRT 和 AM 估计器(由 Aboutanios 和 Mulgrew 在文献[15]中提出)的参数联合估计算法, 该算法仅需利用稀疏线阵对信号进行欠采样、对获得的少量样本做 DFT、频率及相位校正、CRT 重构等综合处理, 即可实现频率和 DOA 的高精度联合估计。为提高频率估计精度和消除频偏敏感性, 本方案引入 AM 估计器来获取各阵元信号的频率余数, 结合 CRT 获得频率估计, 并推导出了频率测量方差的理论表达式。此外, 在文献[14]的基础上, 本文设计出了更灵活的阵列布置方案和具体的信号相位差提取方法, 并探究了阵列稀疏性和算法顽健性的关系。本文算法仅需对各阵元信号做一次并行欠采样, 其谱校正结果可同时为频率估计器和 DOA 估计器所利用, 即处理同一组样本数据便可获得目标参数的联合估计结果, 相比于文献[14]算法, 更能胜任于时变目标估计场合。仿真结果验证了本文算法的高精度性能和对噪声的顽健性。

2 系统模型

如图 1 所示, 考虑由 $L(L>2)$ 个传感器阵元组成的非均匀线阵, 对于远场信号, 其到达各阵元的波

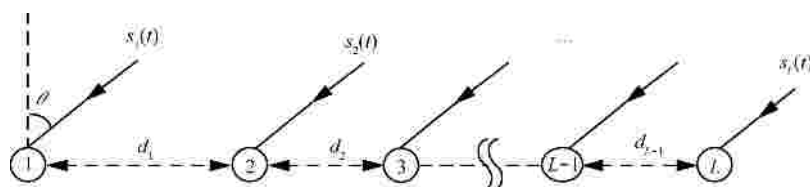


图 1 稀疏阵列模型

前可视为平面波。不失一般性，将远场信号表示为以下单频复指数形式

$$s_0(t) = A \exp(j2\pi f_0 t + j j_0) \quad (1)$$

其中， A 和 f_0 分别为幅度和频率， j_0 表示信号的初相位。令 c_0 表示电磁波传播速度，则信号频率和波长满足 $f_0 = \frac{c_0}{l_0}$ 。考虑噪声和信号在阵列上的相移，

第 i 个阵元接收到的信号可以表示为

$$s_i(t) = A \exp(j2\pi f_0 t + j j_i) + z_i(t), \quad i=1, L, L \quad (2)$$

其中， j_i 为信号到达阵元 i 时的初相位， $z_i(t)$ 为高斯白噪声。从某一时刻开始， L 个阵元（分别对应 $f_{s1} \sim f_{sL}$ 的采样速率）对信号并行进行欠采样得到 L 路样本序列，若每路采集 N 个样本，则阵元 i 对应的样本序列为

$$s_i(n) = A \exp\left(j2\pi f_0 \frac{n}{f_{si}} + j j_i\right) + z_i\left(\frac{n}{f_{si}}\right), n=0, 1, L, N-1 \quad (3)$$

在本文提出的算法中，采样速率远小于信号频率，即 $f_{si} = f_0, i=1, L, L$ ，属于时域欠采样的情况。此外，图 1 中相邻阵元的间距 $d_1 \sim d_{L-1}$ 均大于信号波长的 $\frac{1}{2}$ ，对应于阵元稀疏布置情况。由于不满足采样定理，时间欠采样和空间欠采样分别会引起频谱和相位的模糊问题，这些问题可由第 3 节和第 4 节介绍的重构方法来解决。

3 欠采样下的频率估计方法

3.1 频率求解模型和闭式 CRT

由于采样速率远小于信号频率（即 $f_{si} = f_0$ ），对 L 路样本序列做 DFT，用 k_p 表示由 DFT 谱峰搜索得到的谱峰值位置，则 f_0 可表示为

$$f_0 = n_i f_{si} + (k_{pi} + d_i) \frac{f_{si}}{N}, \quad i=1, L, L \quad (4)$$

其中， n_i 为非负整数（亦称为模糊倍数）， d_i 为未知小数（亦称为频偏值）且满足 $|d_i| < 0.5$ 。式(4)可以进一步转化为以下 CRT 模型

$$Q = n_i M_i + r_i, \quad i=1, L, L \quad (5)$$

其中， f_0 对应 CRT 中的被除数 Q ， f_{si} 对应模数 M_i ，而 CRT 重构所需的余数为

$$r_i = (k_{pi} + d_i) \frac{f_{si}}{N} \quad (6)$$

根据文献[12]，闭式顽健 CRT 要求模数组 $M_1 \sim M_L$ 具有最大公约数 M ，且除以 M 后的结果 $\Gamma_i = \frac{M_i}{M}$ 两两互质。定义 $\bar{\Gamma}_{i,1}$ 为 Γ_1 关于 Γ_i 的模逆，即满足

$$\bar{\Gamma}_{i,1} \Gamma_1 + k \Gamma_i = 1, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

非负实数 Q 可由以下闭式顽健 CRT 重构算法求出。

步骤 1 从余数组 $r_1 \sim r_L$ 中计算中间变量 $q_{i,1}$

$$q_{i,1} = \left\lfloor \frac{(r_i - r_1)}{M} \right\rfloor, \quad 2 \leq i \leq L \quad (8)$$

其中， $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整运算。

步骤 2 计算中间变量 $x_{i,1}$

$$x_{i,1} = q_{i,1} \bar{\Gamma}_{i,1} \bmod \Gamma_i, \quad 2 \leq i \leq L \quad (9)$$

步骤 3 计算第一个模糊倍数 n_1

$$n_1 = \sum_{i=2}^L x_{i,1} b_{i,1} \left(\frac{g_1}{\Gamma_i} \right) \bmod g_1 \quad (10)$$

其中， $b_{i,1}$ 是 $\frac{g_1}{\Gamma_i}$ 关于 Γ_i 的模逆， g_1 为中间变量且

$$g_1 = \prod_{k=2}^L \Gamma_k$$

步骤 4 计算其余的模糊倍数 n_i

$$n_i = \frac{(n_1 \Gamma_1 - q_{i,1})}{\Gamma_i}, \quad 2 \leq i \leq L \quad (11)$$

步骤 5 重构 Q

$$Q = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (n_i M \Gamma_i + r_i) \quad (12)$$

由文献[12]可知，闭式 CRT 的重构范围为

$$0 < Q < \text{lcm}(M_1, L, M_L) = M \prod_{i=1}^L \Gamma_i \quad (13)$$

其中， $\text{lcm}(\cdot)$ 表示取最小公倍数。实际应用中，可根据工程需求的频率测量范围，选择满足式(13)的 M 和互质整数组 $\Gamma_1 \sim \Gamma_L$ ，进而确定各阵元的采样速率

$$f_{si} = M \Gamma_i, \quad i=1, L, L \quad (14)$$

3.2 基于 CRT 和 AM 谱校正的频率估计

传统 CRT 对余数误差敏感，余数存在微小的误差都会导致重构失败，闭式顽健 CRT 克服了这一缺陷，将其精确重构所允许的余数误差上限放宽到模

数组最大公约数的 $\frac{1}{4}$ [12], 即

$$\Delta r_i = |\hat{r}_i - r_i| < \frac{M}{4}, \quad i=1, L, L \quad (15)$$

其中, \hat{r}_i 表示实际测量的带误差的余数。对每一路样本, DFT 的频率分辨率 $\Delta f = \frac{f_{si}}{N}$ 固定, 当信噪比不太低时, k_{pi} 的值可直接通过 DFT 谱峰搜索得到。由式 (6) 可知, 假设 k_{pi} 为准确值, 余数 $r_i = (k_{pi} + d_i) \frac{f_{si}}{N}$ 的误差完全取决于频偏值 d_i 的测量误差。文献[9]中的算法直接舍去了小数部分 d_i , 采用将各路 DFT 点数设置为该路采样速率的值(样本长度不够时在末端补零)的办法, 因而其频率估计值只能精确到 $\Delta f = 1 \text{ Hz}$; 此外, 当样本数较少时, 大点数的 DFT 造成了运算的浪费, 这与实际应用中布置低功耗低成本的传感器阵列的需求相悖。若减小 DFT 的点数, 又会因“栅栏效应”而增大余数的误差, 甚至导致 CRT 重构失败。

在一些实际应用中, 当目标高速移动或环境较恶劣时, 阵列的采样时间很短, 往往只能捕捉到少量样本。若能在样本数 N 的值较小时精确估算出 d_i , 则既可降低运算量(令 DFT 点数为 N 而非 f_s), 又能克服“栅栏效应”的影响, 从而提高估计精度。文献[12]通过引入 Candan 估计器对 DFT 结果进行校正, 突破了频率分辨率受 DFT 点数的限制。然而对于不同的频偏值, Candan 估计器的性能差异较大[13]。显然, 由于阵元的采样速率各异, 信号在各阵元上的频偏 $d_1 \sim d_L$ 也各不相同, 这会严重影响频率估计精度。文献[15]提出的 AM 估计器克服了频偏敏感性, 仅需 2 次迭代即可得到精确的频偏估计值。本文算法利用 AM 估计器来提取精确的余数信息, 进而结合闭式 CRT 实现高精度的频率估计, 算法流程如下。

步骤 1 对 L 路样本做 N 点 DFT, 即 $S_i(k) = \text{DFT}(s_i(n)), k=0, L, N-1$, 并通过谱峰搜索得到峰值位置 $\hat{k}_{pi}, i=1, L, L$ 。

步骤 2 对第 i 路样本, 初始化频偏值 $d_i^{(0)} = 0$, 按以下步骤计算得第 l 个迭代值 d_i^l

$$X_q = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \exp\left(-j2\pi k \frac{(k_{pi} + d_i^{l-1} + q)}{N}\right), q = \pm 0.5 \quad (16)$$

$$d_i^l = d_i^{l-1} + 0.5 \text{Re}\left(\frac{X_{0.5} + X_{-0.5}}{X_{0.5} - X_{-0.5}}\right) \quad (17)$$

其中, $\text{Re}(\cdot)$ 表示取实部。

步骤 3 对每一路样本按步骤 2 进行处理(迭代 2 次以上估计值可视为收敛), 得到 L 个频偏估计值 $\hat{d}_i, i=1, L, L$ 。

步骤 4 将 \hat{k}_{pi}, \hat{d}_i 代入式(6)则可得到校正后的频率余数估计值 $\hat{r}_i, i=1, L, L$ 。

步骤 5 将参数 $\hat{r}_i, f_{si}, i=1, L, L$ 代入闭式顽健 CRT, 得频率估计值 \hat{f}_0 。

已知频率估计的克拉美罗界(CRB, Cramér-Rao bound)[17]

$$s_f^2 = \frac{6f_s^2}{(2p)^2 r N(N^2 - 1)} \quad (18)$$

其中, f_s 为采样速率, $r = \frac{A^2}{s^2} = 10^{\frac{SNR}{10}}$, s^2 为噪声方差。文献[15]指出, 对于任意频偏情况, AM 估计器的频率估计方差仅为 CRB 的 1.014 7 倍。当 $N \gg 1$ 时, 各路频率余数估计值的方差可近似为

$$\text{var}(\hat{r}_i) \approx 1.0147 \frac{6f_s^2}{(2p)^2 r N^3} \quad (19)$$

由于各阵元的采样相对独立(即各频率余数不相关), 则由 CRT 算法流程可知, 最终频率估计值 \hat{f}_0 等于多路估计值的平均, 故可推出 \hat{f}_0 的理论方差表达式为

$$\text{var}(\hat{f}_0) = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^L \text{var}(\hat{r}_i) = \frac{1.52205}{r(Lp)^2 N^3} \sum_{i=1}^L f_{si}^2 \quad (20)$$

由式(14)可知 $f_{si} = M\Gamma_i$, 当确定模数组最大公约数 M 后, 采样速率 f_{si} 取决于 Γ_i 的取值。由式(13)得

$$\prod_{i=1}^L \Gamma_i > \frac{Q}{M} \quad (21)$$

为了降低对阵元采样性能的要求, 在满足式(21)的前提下, $\Gamma_1 \sim \Gamma_L$ 应通过合理的取值使 $\prod_{i=1}^L \Gamma_i$ 尽量小。把式(14)代入式(20), 得

$$\text{var}(\hat{f}_0) = \frac{1.52205M^2}{r(Lp)^2 N^3} \sum_{i=1}^L \Gamma_i^2 \quad (22)$$

由式(22)可看出, 当信噪比、阵元数、样本数及模数组最大公约数 M 固定时, 频率估计方差随 $\sum_{i=1}^L \Gamma_i^2$ 增加而变大。经过简单推导得知, 在 $\prod_{i=1}^L \Gamma_i$

接近的情况下， $\Gamma_1 \sim \Gamma_L$ 的值分布越紧凑， $\sum_{i=1}^L \Gamma_i^2$ 越小，因此，在工程应用中 $\Gamma_1 \sim \Gamma_L$ 可在质数表中选取相邻的 L 个值，且质数组的连乘积应为满足式(21)的最小值。采样速率 $f_{s1} \sim f_{sL}$ 接近有利于在实际应用中布置性能相当的阵元，减少阵元间的差异性，降低工程布置难度；同时，由于 $f_{s1} \sim f_{sL}$ 接近，各阵元采集 N 个样本的耗时几乎相同，防止出现因某一个阵元耗时过长带来的不良影响。

4 稀疏阵列的 DOA 估计方法

4.1 DOA 估计的 CRT 模型

由图 1 所示的阵列结构，不难推出在某一时刻阵元 j 和阵元 $j+1$ 的接收信号相位差为

$$\Delta j_j^- = 2pd_j \frac{\sin q_0}{l_0}, \quad j=1, L, L-1 \quad (23)$$

其中， q_0 为信号的入射角(即 DOA)。当阵元间距 d_j 大于入射信号半波长时， Δj_j^- 会产生以 $2p$ 为单位的模糊，即

$$\Delta j_j^- = 2pn_j + \Delta j_j, \quad \Delta j_j \in [0, 2p) \quad (24)$$

其中， n_j 为模糊倍数， Δj_j 为理想的相位差测量值。结合式(23)和式(24)，有

$$2pd_j \frac{\sin q_0}{l_0} = 2pn_j + \Delta j_j \quad (25)$$

将式(25)两边同时乘以参数 $\frac{d_0}{2pd_j}$ ，得

$$d_0 \frac{\sin q_0}{l_0} = n_j \left(\frac{d_0}{d_j} \right) + \frac{\Delta j_j d_0}{2pd_j} \quad (26)$$

其中， d_0 和 d_j 的定义如下

$$d_0 = CM_q \prod_{k=1}^{L-1} \Gamma_{qk} \quad (27)$$

$$d_j = C \prod_{k=1}^{L-1} \frac{\Gamma_{qk}}{\Gamma_{qj}} \quad (28)$$

其中， C 为非负常数， M_q 为正整数， $\Gamma_{q1} \sim \Gamma_{q(L-1)}$ 两两互质。将式(26)等号左边用 Q_q 表示，即

$$Q_q = d_0 \frac{\sin q_0}{l_0} \quad (29)$$

分别定义模 M_j 和相位差余数 r_{qj} 为

$$M_j = \frac{d_0}{d_j} = M_q \Gamma_{qj} \quad (30)$$

$$r_{qj} = \frac{\Delta j_j d_0}{2pd_j} = \Delta j_j \frac{M_q \Gamma_{qj}}{2p} \quad (31)$$

则式(26)可以转化为以下 CRT 模型

$$Q_q = n_j M_j + r_{qj}, \quad j=1, L, L-1 \quad (32)$$

从上文推导得知， d_0 为计算过程所需的中间变量，式(30)中的 M_q 对应 CRT 的模数组 $M_1 \sim M_{L-1}$ 的最大公约数，其取值与 DOA 估计算法的性能无关，故可将 M_q 设为任意正整数。把相应的参数代入 3.1 节中的闭式 CRT 按步骤求解，则可重构出被除数 Q_q ，进而 DOA 的值可由下式得

$$q = \sin^{-1} \left(\frac{Q_q l_0}{d_0} \right) \quad (33)$$

其中， $l_0 = \frac{c_0}{f_0}$ 可由 3.2 节中的频率估计结果得到。

4.2 参数设置及性能分析

由 4.1 节的推导过程不难看出，影响 DOA 估计精度的因素有 2 个：频率估计 f_0 和余数 r_{qj} 的误差。

其中，频率估计的误差分析已在 3.2 节给出；余数的误差主要来自相位差 Δj_j 的测量误差，其中各阵元信号的初相位可由 AM 估计器进行相位校正得到，方法如下。

步骤 1 按 3.2 节中给出的算法得到 L 个归一化频偏估计值 $\hat{d}_i, i=1, L, L$ 。

步骤 2 对第 i 路样本，获取 DFT 谱峰位置对应的相位 j_{pi} ，则阵元 i 上的接收信号初相位 j_i 可由以下公式校正得到(推导过程见文献[18])

$$j_i = j_{pi} - \frac{N-1}{N} \hat{d}_i p, \quad i=1, L, L \quad (34)$$

步骤 3 计算阵元 j 和阵元 $j+1$ 的相位差

$$\Delta j_j = (j_j - j_{j+1}) \text{mod } 2p, \quad j=1, L, L-1 \quad (35)$$

其中， $\text{mod}(\cdot)$ 表示模除操作，这里是为了保证 CRT 余数的非负性。

下面讨论阵列的参数设置依据以及稀疏性与顽健性的关系。用 Δj_j^{\wedge} 表示实际测量的相位差， e_j 表示测量误差，即

$$\Delta j_j^{\wedge} = \Delta j_j + e_j \quad (36)$$

用 \hat{r}_{qj} 表示带误差的余数，则由式(31)得

$$\hat{r}_{qj} = (\Delta j_j^{\wedge} + e_j) \frac{d_0}{2pd_j} \quad (37)$$

把式(31)和式(37)代入式(15)给出的余数误差上限公式，有

$$\Delta r_{qj} = \left| \hat{r}_{qj} - r_{qj} \right| = \left| e_j \frac{d_0}{2pd_j} \right| < \frac{M_q}{4} \quad (38)$$

把式(30)代入式(38)并化简, 得

$$e_j < \frac{P}{2\Gamma_{qj}}, \quad j=1, L, L-1 \quad (39)$$

当相位差测量误差满足式(39)的条件时, 即可成功重构出 DOA 的值。

由式(13)给出的 CRT 重构范围并将式(27)和式(29)代入, 易推得非非常数 C 的取值范围

$$0 < C < \frac{l_0}{\sin q_0} = \frac{c_0}{f_0 \sin q_0} \quad (40)$$

若给定系统的频率 f_0 的测量范围为 $(0, f_{\max}]$, 信号入射角 q_0 在 $\left(0, \frac{P}{2}\right]$ 内分布, 经简单推算可得

$$0 < C < \frac{c_0}{f_{\max}} \quad (41)$$

由式(28)可知, 相邻阵元间距 d_j 由参数 C 和质数组 $\Gamma_{q1} \sim \Gamma_{q(L-1)}$ 共同决定。由于包含质数相乘项, 故 d_j 可以远大于信号的半波长。实际应用中, 一旦给定频率和 DOA 的测量范围, 参数 C 可以在式(41)给出的范围内根据实际需求选取, 从而实现阵列间距的灵活调节。参数 C 确定后, $\Gamma_{q1} \sim \Gamma_{q(L-1)}$ 取值越大阵列越稀疏, 而由式(39)可知, 算法对相位差误差的容错性越小, 这体现了阵列的稀疏性与系统顽健性的矛盾, 具体参数的设置可根据实际需求进行权衡。

5 仿真实验

仿真实验参数设置如下。

设定阵元数 $L=3$, 采样速率分别为 $f_{s1}=97$ kHz, $f_{s2}=101$ kHz, $f_{s3}=103$ kHz(对应 CRT 参数 $M=1\ 000$, $[G_1, G_2, G_3]=[97, 101, 103]$), 由式(13)可知系统可测的最大频率 f_{\max} 为 1.009 091 GHz; 显然, 采样速率比 f_{\max} 低了 4 个数量级, 属于时域欠采样情况。

考虑信号入射角 q_0 的分布范围为 $(0, 90^\circ]$, 设置参数 $M_q=2$, 由于测频上限 f_{\max} 为 1.009 091 GHz, 则根据式(41)有 $0 < C < \frac{c_0}{f_{\max}} \approx 0.3$ m, 在本实验中设置 $C=0.2$ m, 满足要求。由于阵元数 $L=3$, 设置互质组参数 $[\Gamma_{q1}, \Gamma_{q2}]=[2, 3]$, 则由式(28)可确定相邻阵元的间距分别为 $[d_1, d_2]=[0.6$ m, 0.4 m] (d_j 表示

第 $j+1$ 与 j 个阵元的间距, 如图 1 所示。当信号频率取测量范围内的最大值 f_{\max} 时对应的波长最小, 此时 $\frac{1}{2}$ 波长约为 0.15 m, 小于阵列最小间距, 因此仿真实验构造的阵列是稀疏的, 属于空间欠采样情况。

在本节的实验中, 分别用检测概率 p_d 和均方根误差(RMSE, root mean square error)对算法的抗噪性以及参数估计精度进行考量, 并将本文算法与文献[9]提出的方法(DFT 点数取采样速率的值)和文献[12]提出的采用 Candan 谱校正的方法进行比较。假设各阵元接收特性相同且相互独立, 每个阵元上采集的样本数 $N=1\ 024$, 噪声为零均值的高斯白噪声, 在每个 SNR 条件下进行 1 000 次 Monte Carlo 实验。

仿真 1 首先单独考察时域欠采样下频率估计的抗噪性能。每次实验中, 固定入射角 $q_0=38^\circ$, 频率 f_0 随机地从 0 到 f_{\max} 间均匀选取。若频率估计值 \hat{f}_0 满足 $|\hat{f}_0 - f_0| < \frac{f_0}{1\ 000}$, 则视为检测成功, 否则视为失败。图 2 给出了检测概率随 SNR 变化的曲线, 从图中可以看出, 采用 AM 谱校正的曲线与 Candan 谱校正的曲线几乎重合, 证明两者的抗噪性能相近, 当 SNR > -14 dB 时均能达到 100% 的检测概率。另外可看出, 在 DFT 点数低 2 个数量级的情况下, 采用本文算法得到的检测概率曲线仅比文献[9]方法得到的曲线右移约 1dB。

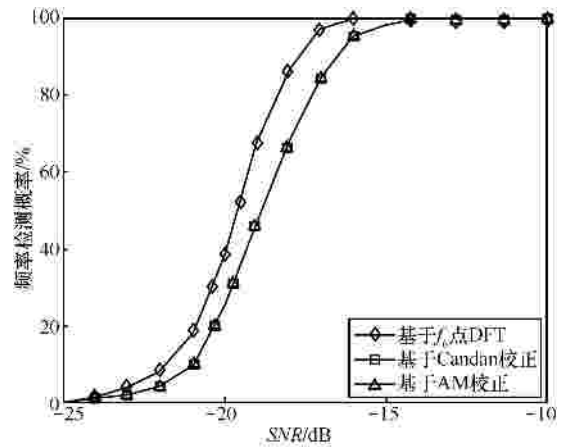


图 2 频率检测概率

仿真 2 为验证联合估计算法的参数估计精度, 将入射信号的频率固定为 $f_0=819\ 660\ 817.2$ Hz, 入射角固定为 $q_0=38^\circ$, 其他参数与仿真 1 保持不

变。图 3 和图 4 分别给出了频率估计和 DOA 估计的 $RMSE$ 变化曲线。从图 3 可看出，在低信噪比情况下($SNR < 14$ dB)，基于 Candan 谱校正的方法与文献[9]方法相比，其频率估计精度略低；随着 SNR 提高，前者的估计值趋向于真实值，而后者因频率分辨率固定为 $\Delta f = 1$ Hz，其结果存在 0.2 Hz 的偏差(无法估计出 f_0 的小数部分)。而本文提出的基于 AM 校正的算法在各信噪比情况下均表现出良好的性能，且实验结果与前文推导得到的理论均方误差(对式(20)取平方根)相吻合。

图 4 给出的是基于谱校正和 CRT 的 DOA 估计算法的 $RMSE$ 曲线(由于文献[11]的算法仅针对频率估计，本仿真只引入基于 Candan 谱校正的方法与本文算法进行对比)。从图 4 中可看出，当 $SNR > 0$ dB 时，两者的 DOA 估计误差均可控制在 0.4° 以内，其中，本文算法得到的 $RMSE$ 曲线在整个 SNR 变化区域均低于基于 Candan 谱校正方法的曲线，这是因为 AM 谱估计器消除了 DOA 估计对入射信号的频偏敏感性，故其具有更高的参数估计精度。

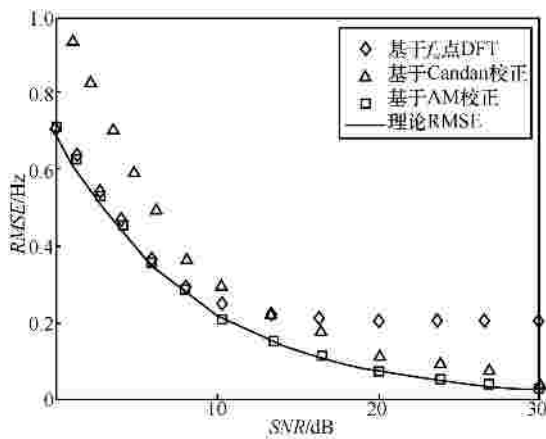


图 3 频率估计的均方根误差

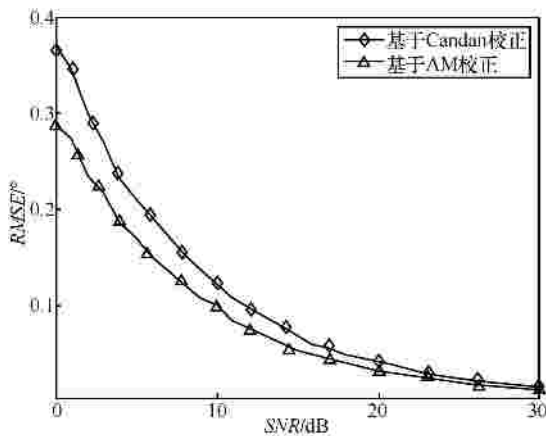


图 4 DOA 估计的均方根误差

仿真 3 最后验证本文 DOA 估计算法的顽健性与阵列稀疏性的关系，在阵元间距 $[d_1, d_2]$ 分别为 $[1.4 \text{ m}, 1 \text{ m}]$ 、 $[2.6 \text{ m}, 2.2 \text{ m}]$ 和 $[3.8 \text{ m}, 3.4 \text{ m}]$ (对应质数组数 $[\Gamma_{q_1}, \Gamma_{q_2}]$ 分别为 $[5, 7]$ 、 $[11, 13]$ 和 $[17, 19]$)3 种情况下进行对比仿真。每次实验中，入射角 q_0 随机地从 $(0, 90^\circ]$ 间均匀选取，其他参数与仿真 2 一致。若 DOA 估计值 \hat{q}_0 满足 $|\hat{q}_0 - q_0| < 1^\circ$ ，则认为检测成功，否则视为失败。图 5 给出了检测概率随 SNR 变化的曲线，从图中可以看出，本文提出的 DOA 估计算法适用于不同的阵列稀疏情况，即使在最稀疏的情况下(对应“o”标注的曲线)，当 $SNR > 5$ dB 时也能达到 100%的检测概率；此外，阵列越稀疏，对应的检测概率曲线越往右移，这是因为质数组取值越大 CRT 的余数容差范围越小，导致低信噪比条件下模糊倍数 n_j 出现估计错误进而导致重构失败，符合 4.2 节的讨论。

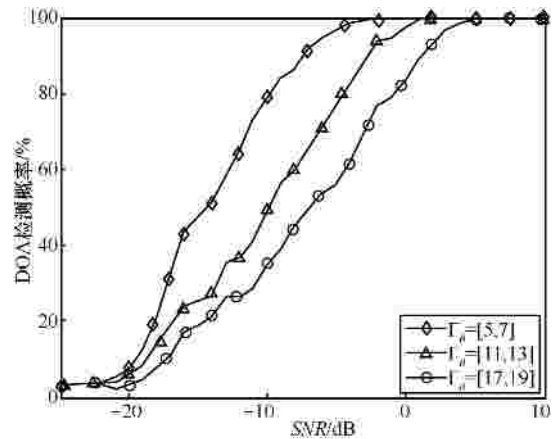


图 5 DOA 的检测概率

6 结束语

本文提出了一种时—空欠采样下入射信号的频率和 DOA 联合估计算法，并给出了详细的阵列模型构建、联合估计算法过程以及估计结果的性能分析。由于本文算法借助 AM 谱校正器解决了低点数 DFT 下的余数(各阵元的频率余数和阵元间的相位差余数)估计精度问题，且无需对同一阵元做多次欠采样，从而相比于文献[14]算法更适合于时变目标跟踪场合。仿真实验表明，本文提出的方法不仅克服了以往基于 CRT 频率估计法的分辨率限制，同时又兼顾了低运算量和高估计精度的优点，尤其适用于雷达、无线通信等工作频率较高且对测量实时性、硬件配置有苛刻要求的场合，具有较广泛的应用前景。

另外，本文算法是针对单目标的时空欠采样的入射信号的频率和 DOA 联合估计，对于多目标的联合估计，需解决各目标的频率余数和 DOA 余数的配对问题(文献[14]没有给出具体方案)，因篇幅所限，笔者将另文对该问题做详述。

参考文献：

[1] 孙晓颖, 陈建, 林琳. 基于时空处理的频率与二维 DOA 联合估计算法[J]. 通信学报, 2009, 30(8): 39-44.
SUN X Y, CHEN J, LIN L. Joint signal carrier frequency and 2D DOA estimation method based on space-time processing[J]. Journal on Communications, 2009, 30(8): 39-44.

[2] KRIM H, VIBERG M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67-94.

[3] LEMMA A N, VEEN A J V D, DEPRETTERE E F. Analysis of joint angle-frequency estimation using ESPRIT[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(5): 1264-1283.

[4] LIN J D, FANG W H, WANG Y Y, et al. FSF MUSIC for joint DOA and frequency estimation and its performance analysis IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(12): 4529 - 4542.

[5] ZOLTOWSKI M D, MATHEWS C P. Real-time frequency and 2-D angle estimation with sub-Nyquist spatio-temporal sampling[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(10): 2781-2794.

[6] 沈志博, 董春曦, 黄龙, 等. 基于压缩感知的宽频段二维 DOA 估计算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36 (12):2935-2941.
SHEN Z B, DONG C X, HUANG L, et al. Broadband two dimensional DOA estimation based on compressed sensing[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36 (12):2935-2941.

[7] VAIDYANATHAN P P, PAL P. Theory of sparse coprime sensing in multiple dimensions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(8): 3592 -3608.

[8] SI Q, ZHANG Y D, AMIN M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(6): 1377-1390.

[9] LI X, LIANG H, XIA X G. A robust Chinese remainder theorem with its applications in frequency estimation from undersampled waveforms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(11): 4314-4322.

[10] WANG W, XIA X G. A closed-form robust Chinese remainder theorem and its performance analysis[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(11): 5655-5666.

[11] 王文杰, 李小平. 鲁棒的闭式中国余数定理及其在欠采样频率估计中的应用 [J]. 信号处理, 2013, 29(9): 1206-1211.
WANG W J, LI X P. The closed-form robust Chinese remainder theorem and its application in frequency estimation with undersampling[J]. Journal of Signal Processing, 2013, 29(9): 1206-1211

[12] 黄翔东, 丁道贤, 南楠, 等. 基于中国余数定理的欠采样下余弦信号的频率估计[J]. 物理学报, 2014, 63(19): 198403.

HUANG X D, DING D X, NAN N, et al. Frequency estimation of undersampled sinusoidal signal based on Chinese remainder theorem[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(19): 198403.

[13] CANDAN A A. A method for fine resolution frequency estimation from three DFT samples[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(6): 351 - 354.

[14] 梁红, 张恒. 空时欠采样下多目标频率和方位联合估计新方法[J]. 西北工业大学学报, 2012, 30(5): 694-698.
LIANG H, ZHANG H. An effective method for joint estimation of frequency and DOA with sub-Nyquist spatial-temporal signals based on GRCRT for multiple numbers[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2012, 30(5): 694-698.

[15] ABOUTANIOS E, MULGREW B. Iterative frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(4): 1237-1242.

作者简介：



黄翔东 (1979-), 男, 江西九江人, 博士, 天津大学副教授, 主要研究方向为频谱分析、数论在阵列信号处理中的应用及滤波器设计等。



洗弘宇 (1990-), 男, 广西桂平人, 天津大学硕士生, 主要研究方向为中国余数定理在阵列信号处理中的应用。



闫子阳 (1989-), 男, 河北石家庄人, 天津大学硕士生, 主要研究方向为中国余数定理与互素谱分析。



景森学 (1991-), 男, 甘肃定西人, 天津大学硕士生, 主要研究方向为数字滤波器设计。